Robert Müller
Bundesrealgymnasium Wien 3

STETIGKEIT - ALTES KONZEPT IN NEUEM GEWAND ?

1. EINLEITUNG

'Stetigkeit' ist ein didaktisch besonders reizvolles Thema. In ihm tritt die (durchaus nicht seltene) Diskrepanz zwischen dem fachdidaktischen Anspruch einerseits und der Schulwirklichkeit andererseits in besonders krasser Form zu Tage. Umfang und Inhalt des in den Lehrbüchern Gebotenen findet - wenn ich meine (sehr) persönlichen Erfahrungen verallgemeinere - allzuoft nicht die (volle) Zustimmung der Lehrer und Schüler. Weshalb ist das so ?

Vielleicht deshalb,

* weil 'Stetigkeit' als "theoretischer" Begriff gilt, der bloß (?) einer "Exaktifizierung" von "an sich völlig Klarem" gilt, oder - noch schlimmer - durch diese "Exaktifizierung" erst unanschaulich und kompliziert wird ?
* weil sich daraus kaum "schöne" Beispiele (mit zweimal unterstreichbaren Ergebnissen) zimmern lassen ?
* weil meist die Zeit drängt, "Wichtigeres" durchgenommen werden muß ?

Zweck dieses Vortrages ist es, zu diesen drei häufig gehörten Einwänden Stellung zu nehmen. Als Mittel zum Zweck dient ein konkreter Lehrgang in einem Lehrbuch (L1)[1]. Anhand der Analyse seines Aufbaues soll verdeutlicht werden, daß - wie so oft - im Grunde verschiedene Meinungen über den Sinn und Zweck eines solchen Lehrganges, in letzter Konsequenz aber der Bildungsauftrag des Mathematikunterrichtes und seine Beziehungen zur Fachwissenschaft Mathematik zur Diskussion stehen.

2. UNAUFFÄLLIGE UND AUFFÄLLIGE (UN-)STETIGKEIT

Es ist unbestritten, daß 'Stetigkeit' in der Analysis eine zentrale Rolle spielt. Viele wichtige Sätze fordern in ihren Voraussetzungen 'Stetigkeit'. Insofern dient 'Stetigkeit' nicht so sehr der "Beschreibung" von Situationen (Fig. 1), sondern vielmehr der Absicherung der Wirksamkeit mathematischer Verfahren und des Gültigkeitsbereiches mathematischer Sätze. Z.B. ist 'Stetigkeit' der Garant dafür, daß das als 'Binäres Suchen' bekannte Näherungsverfahren zum

1) Es wäre vorteilhaft, beim Lesen dieses Artikels diesen Text zur Verfügung zu haben. Es kann kostenlos beim Verlag bezogen werden.

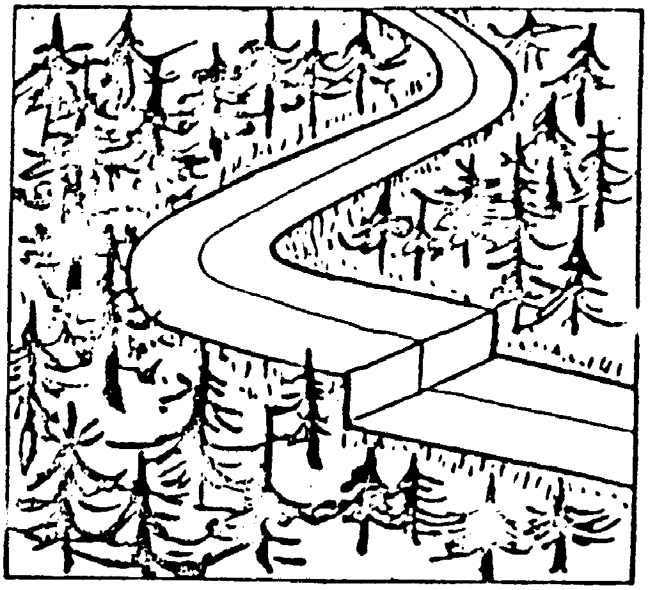

Fig. 1[2)]

Lösen von Gleichungen "funktioniert", oder daß der 'Zwischenwertsatz' gilt. So gesehen ist 'Stetigkeit' ein innermathematischer Begriff von - zunächst - eher theoretischer Bedeutung. Eingedenk des Mottos: "Nichts ist so praktisch wie eine gute Theorie" braucht man jedoch nach den - mehr oder weniger auffälligen - praktischen Konsequenzen nicht lange suchen.

Schon immer haben wir uns - bewußt oder unbewußt - beim Rechnen mit den Grundrechnungsarten der Stetigkeit dieser Operationen bedient !

Zum Beispiel verwenden wir beim 'überschlägigen Multiplizieren' zweier Za...en a und b die Tatsache, daß eine (genügend) "kleine" Änderung eines Faktors eine (beliebig) "kleine" Ungenauigkeit beim Wert des Produktes c nach sich zieht. Genauer: In der Gleichung $(a + \Delta a).(b + \Delta b) = c + \Delta c$ geht der 'Fehler' Δc gegen null, wenn nur die 'Fehler' Δa und Δb der Faktoren gegen null gehen. Solche Aussagen und daraus resultierende Verfahren zur Abschätzung der 'Fehler' und 'Fehlerfortpflanzung' sind ohne Bezugnahme auf 'Stetigkeit' undenkbar.

Schon immer haben wir uns - bewußt oder unbewußt - beim Zeichnen von Funktionsgraphen auf die Stetigkeit der Funktion gestützt !

Anders als bei den Grundrechnungsarten darf man sich hier jedoch nicht "blind" auf die Stetigkeit verlassen. Besonders deutlich wird dies beim Einsatz des Computers zum Erstellen von Funktionsgrafiken:

2) Entnommen L2.

Betrachten wir das folgende, auf einem Matrixdrucker erstellte Bild (Fig. 2). Es soll ein Stück des Graphen von

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{2.(x^2 - x)}$$

darstellen:

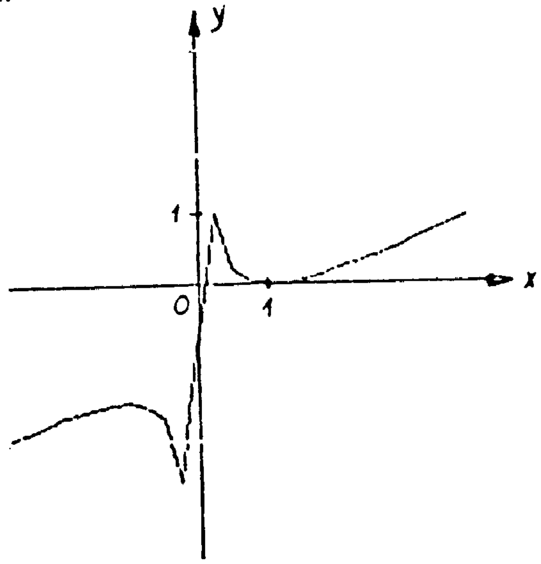

Fig. 2

Erstens fällt auf, daß der Graph dieser rationalen Funktion 'Spitzen' zeigt. Das hätten wir nicht erwartet ! Zeichnet man den Graphen mit einer anderen "Schrittweite", so verändern die 'Spitzen' ihre Lage. Irgendetwas kann da nicht stimmen !

Zweitens fällt auf, daß die aus der Grafik ablesbaren Näherungswerte $x_1 = 0{,}1$ und $x_2 = 1$ für die Nullstellen einer Probe nicht standhalten: $f(x_1) = 4{,}05$ und $f(x_2)$ ist sogar unbestimmt !

Der Grund für die fehlerhafte Darstellung des Graphen und seiner Nullstellen ist ein prinzipieller ! Das im Computerprogramm verwendete - dem "händischen" Zeichnen nachgeahmte - Verfahren, welches im gewünschten Intervall $[a,b]$ der Reihe nach an den Stellen a, $a+\Delta x$, $a+2.\Delta x$, ..., $b-\Delta x$, b die Funktionswerte berechnet und "aufeinanderfolgende" Punkte (durch "Strecken") verbindet, ist - zumindest in <u>diesem</u> Fall - unangebracht ! Eine solche Vorgangsweise setzt nämlich voraus, daß die im Zuge der Rechnung "aufeinanderfolgenden" Argumentwerte $x_0-\Delta x$ und x_0 "benachbarte" Kurvenpunkte ansprechen. Mit anderen Worten: Eine solche Vorgangsweise setzt voraus, daß sich der Funktionsgraph beliebig genau durch ein <u>Polygon</u> ersetzen läßt. Dies ist offensichtlich - man vergleiche Fig. 3 - "in der Nähe" von x_1 (wegen der Polstelle bei $x=0$) nicht der Fall. Nicht so "offensichtlich" ist die 'Definitionslücke' bei x_2: sie wird durch die Verbindungsstrecke eines knapp vor mit einem knapp hinter der Definitionslücke liegenden Kurvenpunkt "verdeckt".

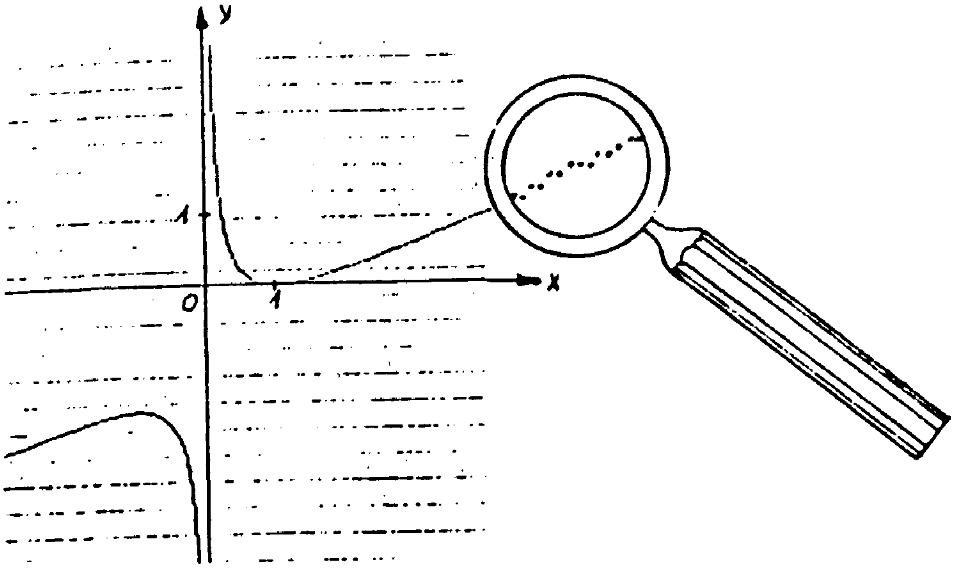

Fig. 3

Drittens fällt - spätestens bei einer genaueren Betrachtung "durch die Lupe" auf, daß die im Prinzip "fadenförmigen" Verbindungsstrecken "aufeinanderfolgender" Punkte durch ein "Muster aus diskret liegenden Punkten" dargestellt werden. Der makroskopisch stetige Eindruck wird durch einen mikroskopisch unstetigen Graphen vermittelt. Dies ist kein Problem, welches man etwa durch kleinere Schrittweiten beim Plotten aus der Welt schaffen könnte. Der digitale Computer kennt kein Dichtheits- und Vollständigkeitsaxiom im üblichen Sinn, also auch nicht 'Stetigkeit' ! Hier liegt ein Problem prinzipieller Natur vor, welches an die philosophischen Wurzeln der zugrundegelegten Weltsicht samt der daraus erwachsenden Modellierung der "Realität" mit wissenschaftstechnischen Mit In rührt. 'Stetigkeit' ist wie 'Dichtheit' oder wie 'Vollständigkeit' eine ganz entscheidende Idealisierung, mit anderen Worten: Eine grundlegende Idee der Mathematik ! Im Sinn von J. BRUNER sollte daher 'Stetigkeit' ein unverzichtbarer Bestandteil jedes Mathematikunterrichtes sein ! Aber in welcher Form ? In welcher Einkleidung ? Auf welcher Stufe formaler Abstraktion und Exaktifizie - rung ?

3. GIBT ES EINEN KÖNIGSWEG ZUM BEGRIFF 'STETIGKEIT' ?

In vielen Analysislehrbüchern findet man eine Definition der 'Stetigkeit' von Funktionen - wie z.B. die folgende:

$f: R \to R$ ist stetig bei x_0, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

bereits auf einer der ersten Seiten. Dadurch wird zwar unübersehbar ausgedrückt, daß 'Stetigkeit' grundlegend ist, aber eben nur "grundlegend" für die Errichtung des theoretischen Gebäudes 'Analysis' im Sinn einer "Voraussetzung". Außerdem wird 'Stetigkeit' in diesen Lehrgängen allzuoft bereits als fertiger, vorfabrizierter formaler Begriff zur Verfügung gestellt. Im Sinn von J.BRUNER müssen wir jedoch mehr verlangen,- die Entwicklung eines Verständnisses, etwa durch die Beschäftigung mit folgenden Fragen:

Ist eine Formalisierung - wie z.B. die obige - überhaupt nötig, macht sie die grundlegende Idee deutlicher ?

Blickt man in die Geschichte der Mathematik zurück, so war bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts 'Stetigkeit' keine von der Funktion "abgetrennte" Eigenschaft. Selbst GAUSS verwendete beim Beweis des berühmten Fundamentalsatzes der Algebra den Zwischenwertsatz (und damit 'Stetigkeit') rein anschaulich.

Ist die Präzisierung des Begriffes 'Stetigkeit' in der obigen Form die einzig (sinnvoll) mögliche ?

Blickt man in die Fachliteratur, so findet man eine Vielzahl von Definitionen zum Stichwort 'Stetigkeit', z.B.:

* $f:R \to R$ heißt stetig bei x_0, falls für jede Folge $\langle x_n \rangle$, $x_n \in [a,b]$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, dh., $f:R \to R$ heißt stetig bei x_0 $\iff \forall \langle x_n \rangle$, $x_n \in [a,b]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

* $f:R \to R$ heißt stetig bei x_0, falls zu jeder Umgebung $U(f(x_0))$ eine Umgebung $V(x_0)$ existiert mit $f(V) \subset U$,
dh., $\forall\, U(f(x_0)) \Longrightarrow \exists\, V(x_0)$: $f(V) \subset U$.

* $f:[a,b] \to R$ heißt überall stetig $\iff$ f bei jedem $x_0 \in [a,b]$ stetig.

* f heißt auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig $\iff \forall\, x', x'' \in [a,b]$ gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\, \delta > 0 : |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

* Eine Funktion $g:=(x \to g(x), \mathfrak{J})$ heißt global-Lipschitz-stetig genau dann, wenn eine nur von g abhängige Konstante $L \in R^+$ existiert, sodaß gilt:
$|g(x) - g(y)| \leq L.|x - y|$ für alle $x,y \in \mathfrak{J}$.

* Eine Menge $\{f_i\}$ von Funktionen heißt gleichgradig stetig bei x_0 $\iff$
Jedes $f_i \in \{f_i\}$ ist stetig bei x_0.

* Die Menge $\{f_i\}$ heißt (überall) gleichgradig stetig $\iff$ Jedes f_i ist bei jedem x_0 stetig.

In den Mathematikunterricht haben hierzulande (bisher) "nur" die ersten drei Definitionen Eingang gefunden. Der Grund dafür mag darin liegen, daß die anderen Definitionen als "Verschärfungen" des "gewöhnlichen Stetigkeitsbegriffes" Funktionseigenschaften fordern, die nur wenige Funktion(enklass)en besitzen. Umgekehrt sind gerade diese Funktion(enklass)en wiederum durch ihre - über das "gewöhnliche Maß" hinausreichenden - Stetigkeitseigenschaften "ausgezeichnet". So stellt z.B. die LIPSCHITZ-Bedingung $|g(x)-g(y)| \leq L.|x-y|$, welche ausgedrückt in ε und δ die Gestalt $\varepsilon \leq L.\,\delta$ hat, die Forderung nach direkter Proportionalität zwischen ε und δ dar. Diese Forderung geht offensichtlich über den in der "gewöhnlichen" Definition geforderten, nicht näher spezifizierten Zusammenhang hinaus, und kennzeichnet so die sog. 'gutartigen Funktionen'. Mit deren Hilfe läßt sich - analog zur "gewöhnlichen" Analysis - eine "vereinfachte Analysis" aufbauen (vgl. L3).

Bleiben wir jedoch bei den üblichen Definitionen. Naheliegend ist die Frage, welche von ihnen die "beste" sei ?

Wie H.-C. REICHEL (L4) überzeugend dargelegt hat, verändert sich ein "Begriff" durch seine Formalisierung. Mit anderen Worten: Man erhält unter Umständen mehrere formale Begriffe, welche die ursprüngliche Idee in verschiedener Weise faßbar und handhabbar machen. Das in Fig. 1 widergegebene Bild macht den (Un-)Stetigkeitsbegriff leicht auffaßbar, aber in keiner Weise handhabbar. Umgekehrt zeigt die Eigenschaft: $\Delta c \rightarrow 0$, falls Δa, $\Delta b \rightarrow 0$ in der Fehlerabschätzung bei den Grundrechnungsarten deutlich den Handhabungsaspekt des formalen Stetigkeitsbegriffes, entbehrt aber weitgehend der optischen Suggestion von Fig. 1.

Für den Begriff 'Stetigkeit' muß man feststellen, daß die erste Definition ("Folgendefinition") und die zweite Definition ("Umgebungsdefinition") <u>äquivalent</u> sind. Darüber hinaus lassen sich beide Definitionen im wesentlichen gleichgut für Anwendungen in beliebigen topologischen Räumen auf 'Netze' (als Verallgemeinerung von 'Folgen') und auf 'Filter' (als Verallgemeinerung von 'Umgebungen') ausdehnen, wobei "die Theorie der Filter einen mit der Theorie der Netze in gewissem Sinn 'äquivalenten' Rahmen für die Behandlung von Konvergenz-Problemen darstellt" (vgl. L5, S. 220f). Die Fachwissenschaft trifft also keine Entscheidung, welche der beiden Definitionen "besser" ist, es sei denn man sagt, <u>wo</u> man den Begriff speziell einsetzen will: So "bieten Filter in der Topologie weit mehr und tiefere Anwendungsmöglichkeiten" ... "in der Analysis sind oft wieder Netze besser" (vgl. L5, S. 222).

Da also die Entscheidung für die eine oder andere Definition nicht unter Berufung auf die Fachwissenschaft erfolgen kann, fällt sie letztlich auf didaktischer Ebene. Wie auch immer - es kann nicht damit getan sein, eine bestimmte Definition von 'Stetigkeit' zu lehren ! Letztlich ist nicht der Wortlaut der Definition das Wesentliche am Bildungsauftrag des Mathematikunterrichtes, sondern die Entstehungsgeschichte eben dieses Wortlautes als eine formale Präzisierung einer Grundidee. Dabei gilt es Fähigkeiten wie die geometrisch/verbale und die verbal/formale Übersetzungsqualifikation, exaktes Agieren und Argumentieren sowie kritisches Denken zu schulen, ohne dabei auf die Festigung grundlegender Fertigkeiten und den Anwendungsbezug zu vergessen. Wenn man so will, geht es - um ein Modewort zu gebrauchen - darum, den Begriff 'Stetigkeit' einer projekthaften Bearbeitung zuzuführen:

4. ALTES KONZEPT IN NEUEM GEWAND ?

Im hier besprochenen Lehrgang (L1) wurde konsequent versucht, den obigen - die Anliegen des neuen Lehrplanes vorwegnehmenden - Ansprüchen gerecht zu werden. Um dem Lehrer einen breiten inhaltlichen wie zeitlichen Spielraum zu bieten, wurde der Lehrgang modular, d.h. dem "Baukastenprinzip" entsprechend, konzipiert. Im folgenden wird unter Bezugnahme auf das Inhaltsverzeichnis von L1 aufgezeigt, wie sich aus einzelnen Blöcken verschiedene Lehrgänge zusammenstellen lassen:

Inhaltsverzeichnis

1) Das Minimalprogramm einer Begriffsgenese - sozusagen der "Grundbaukasten" jedes Lehrganges - besteht aus 4.2.1. und 4.2.2.a. in Verbindung mit 4.3.1. und 4.3.2. In zwei Unterrichtsstunden kann 'Stetigkeit' auf anschaulich-intuitiver Ebene motiviert, "begriffen", formalisiert und jenen Aufgaben zugeführt werden, wie sie für die Einführung in die Differentialrechnung typisch sind.

2) Eine erste Erweiterung des Lehrganges besteht etwa darin, das Minimalprogramm um 4.1. zu bereichern. Die Verknüpfung von 'Stetigkeit' mit (numerischen und/oder graphischen) Verfahren zum näherungsweisen Lösen von Gleichungen betont stärker als das Minimalprogramm den Anwendungsbezug. Darüber hinaus wird durch die Tabelle beim 'Binären Suchen' die "Exaktifizierung" des Begriffes 'Stetigkeit' in Form der "Folgendefinition" vorbereitet. (Ebenso hätte man aus der Tabelle anhand der "Eingrenzungsintervalle" $[a_n, b_n]$ auf die "Umgebungsdefinition" schließen können).

3) Als anspruchsvollerer Lehrgang will das um 4.2.2.b. sowie 4.2.3. und 4.2.4. (eventuell auch 4.3.3.) erweiterte Programm 1) bzw. 2) gelten. Hier wird der bislang auf die Anschauung gegründete Begriff 'Funktionsgrenzwert' auf den bereits bekannten Begriff des 'Folgengrenzwertes' "zurückgeführt", und so die "Folgendefinition" von 'Stetigkeit' hergeleitet (4.2.2.b.). In 4.2.3. und 4.2.4. wird dann versucht, mehr oder weniger systematisch die Wirksamkeit und die Wirkungsbreite eben dieser Definition sowie die im Zuge der Formalisierung erfolgte Begriffsveränderung abzugrenzen. Dabei gewinnt man einen Überblick über typische Erscheinungsformen von "Unstetigkeit", über die Anwendung des Begriffes 'Stetigkeit' bei Definitionslücken oder bei den Grenzen des Definitionsbereiches (insbesonders bei $-\infty$ und $+\infty$).

4) Zum Gesamtlehrgang gelangt man durch die naheliegende Verallgemeinerung der "Fortsetzungs-Idee bei Definitionslücken". 'Stetigkeit' wird nun nicht mehr "ad hoc" als Eigenschaft <u>einer</u> ganz speziellen, vorgegebenen Funktion betrachtet, sondern als Eigenschaft, die einer ganzen Klasse von Funktionen zukommt. In 4.2.5. wird dieser Gedanke aufgegriffen, ohne ihn aber (formal) konsequent verfolgen zu wollen. Das Lehrziel bestand (für die Autoren) eben nicht darin, für alle im Schulalltag gebräuchlichen Funktionen stringente Stetigkeitsnachweise zu führen, sondern die Effizienzsteigerung aufzuzeigen, die das Denken in Funktionenklassen mit sich bringt. Letztlich wird man für diesen anspruchsvollsten Lehrgang doch (je nach Schultyp) 2 - 3 Wochen benötigen. Bezogen auf die zu vermittelnden fachspezifischen "Fakten" mag dies zu viel erscheinen, bezogen auf die an den "Fakten" zu schulenden "fächerübergreifenden Fähigkeiten" mag es jedoch dem einen oder anderen Lehrer vertretbar erscheinen.

wie sich der Lehrer auch immer entscheiden mag -der Schüler hat jedenfalls Gelegenheit, den "roten Faden" nebst historischen Anmerkungen in "populärwissenschaftlicher Form" im Abschnitt 'Rückblick und Ausblick' nachzulesen. Umgekehrt kann gerade dieser Punkt als Ausgangspunkt für eine eigenständige, projekthafte Bearbeitung des Themas durch den Schüler bzw. durch Gruppen von Schülern dienen.

LITERATURHINWEISE:

L1: LAUB u.a.: Alternativtext zu den Kapiteln 4 und 6 im 3. Band des Lehrbuches der Mathematik für die Oberstufe der AHS
Verlag HPT, Wien 1987
erstellt von H.-C. REICHEL und R. MÜLLER

L2: UNFRIED u.a.: Arbeitslehrbuch Mathematik
Verlag C. Ueberreuter, Wien

L3: MÖLLER, H.: Vereinfachte Analysis
Vorlesungsskriptum, Münster 1981

L4: REICHEL, H.-C.: Wie exakt ist die Mathematik ?
Vortrag in Wien, Linz und Salzburg. Vortragsmanuskript.
Erscheint demnächst

L5: CIGLER/REICHEL: Topologie - Eine Grundvorlesung
B.I. Hochschultaschenbücher Band 121, Mannheim 1987[2]

Nachtrag zur Literaturliste zu meinem vorjährigen Vortrag: "Wachstumsprozesse" in ÖMG - Didaktik - Reihe, Heft 14, 1986

Der dort zitierte Vortrag "Differenzengleichungen" von A. VOGEL ist erschienen in 'Didaktik der Mathematik', Bayrischer Schulbuchverlag, 1984